

如何求橢圓面積 (不用微積分)

目的: 用高2程度, 證明橢圓面積  $= \pi a \cdot b$



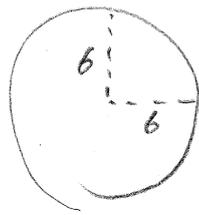
Why 情況? 高2物理 課外題目問到, 水星繞太陽的



跑左半橢圓和右半橢圓, 時間的比 = ?

我們用 Kepler 等面積定律求解. 過程中會用到橢圓面積.

1.



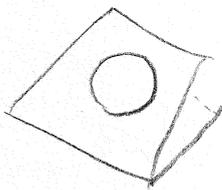
圓面積 =  $\pi \times 6 \times 6$

2.



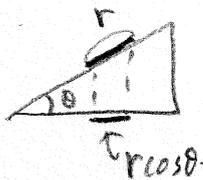
橢圓面積 =  $\pi \times 6 \times 4$

3.

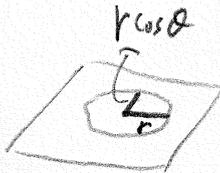
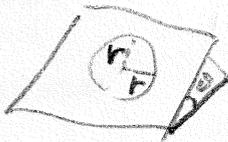


斜面上圓的投影  $\Rightarrow$  桌面上的橢圓

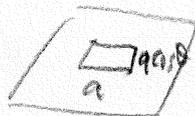
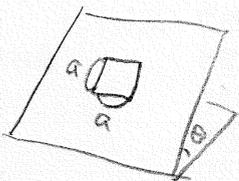
4.



5.



6.



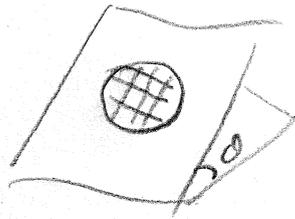
小正方形面積  $a^2$   
斜面上



$a^2 \cos \theta$

桌面上的投影面積

7.

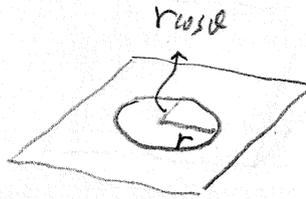
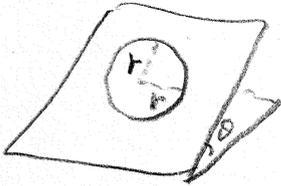


圓可以分解成許多小塊的組合。

→ 每一個小塊投影下來，面積要乘  $\cos\theta$ ，

→ 因此，整個圓的面積投影下來就是  $(\pi r^2) \cdot \cos\theta$

8.



面積 =  $\pi \cdot r \cdot r$

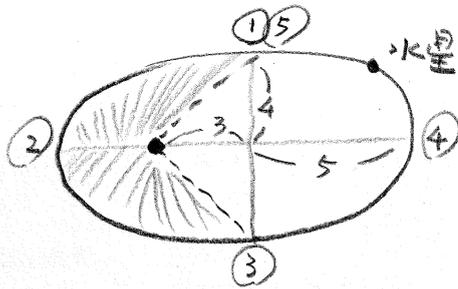
面積 =  $(\pi r^2) \cos\theta \rightarrow \pi \cdot r \cdot r \cos\theta$

9. 結論:



橢圓面積 =  $\pi \cdot a \cdot b$

10. Kepler 第2定律, 等面积定律



$$\frac{t_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3}}{t_{3 \rightarrow 4 \rightarrow 5}} = \frac{\text{Area}_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3}}{\text{Area}_{3 \rightarrow 4 \rightarrow 5}} = \frac{\text{Area}_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3}}{\text{Area}_{3 \rightarrow 4 \rightarrow 5}}$$

$$= \frac{\pi \times 5 \times 4 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 8 \times 3}{\frac{1}{2} \times 8 \times 3 + \pi \times 5 \times 4 \times \frac{1}{2}} \approx \frac{0.447}{1}$$